DST n$^{\text{o}}$1

Mathématiques - 27 Septembre 2025 - 4 heures

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. Les résultats doivent être encadrés ou soulignés. Le résultat d'une question ou d'un problème peut être admis dans les questions suivantes à condition de le mentionner explicitement.

Aucun document n'est autorisé, l'usage de la calculatrice et de tout matériel électronique est interdit.

*
* *

Ce sujet comporte 5 exercices tous indépendants.

Exercice 1

Soit m un nombre réel strictement positif. On s'intéresse à la fonction f_m définie par

$$\forall x \in \left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[,\quad f_m(x)=\frac{m}{\cos(x)}-\frac{m}{2}\tan(x)$$

1. Justifier que f est bien définie sur $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$

2. Montrer que $\forall x \in \left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$, $f_m(x)>0$.

3. La fonction f est-elle paire ? Est-elle impaire ? Justifier.

4. Justifier que f est dérivable sur $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$

5. Montrer que pour tout $x \in \left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$, $f'(x)=\dfrac{2m\sin(x)-m}{4\cos^2(x)}$

   Erreur d'énoncé : $f'(x)=\dfrac{2m\sin(x)-m}{2\cos^2(x)}$

6. Montrer que f_m atteint son minimum en un nombre réel $x_0 \in \left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$ qui ne dépend pas de m.

7. Déterminer une valeur de m telle que pour tout $x \in \mathbb{R}$ (**erreur d'énoncé : pour tout** $x \in \left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$), $f(x)\geq 1$

Exercice 2

On admet dans cet exercice que $0,69<\ln 2<0,7$.

Partie 1

On considère l'application $g:]0;+\infty[\to\mathbb{R}$ définie par $g(x)=x^2+\ln x$

1. Montrer que g est continue et strictement croissante sur $]0;+\infty[$ et déterminer les limites de g en 0 et en $+\infty$

2. Montrer que l'équation $g(x)=0$ admet une unique solution sur $]0;+\infty[$. On note α l'unique solution de cette équation.

3. Montrer que $\dfrac{1}{2}<\alpha<1$.

Partie 2

On note $I=\left[\frac{1}{2};1\right]$ et on considère l'application $f:I\to\mathbb{R}$ définie par $f(x)=x-\dfrac{1}{4}x^2-\dfrac{1}{4}\ln x$

4. (a) Montrer que f est strictement croissante sur I

   (b) Montrer que $\frac{1}{2}<f\left(\frac{1}{2}\right)<f(1)<1$

   (c) En déduire que $\forall x\in I,\ f(x)\in I$

5. On considère la suite (u_n) définie par $u_0=1$ et pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_{n+1}=f(u_n)$

   (a) Calculer u_1

   (b) Montrer que $\forall n\in\mathbb{N}, u_n\in I$

(c) Montrer que la suite (u_n) est décroissante.

(d) Montrer que la suite (u_n) converge et que sa limite est α.

Exercice 3

On pose pour tout entier naturel n non nul :

$$a_n = \sum_{k=1}^{n} \sin\left(\frac{k}{n^2}\right) = \sin\left(\frac{1}{n^2}\right) + \sin\left(\frac{2}{n^2}\right) + \cdots + \sin\left(\frac{n}{n^2}\right)$$

et

$$b_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n^2} = \frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \cdots + \frac{n}{n^2}$$

Le but de cet exercice est de montrer que (a_n) converge et de déterminer sa limite.

1. Déterminer une expression explicite de b_n en fonction de n et en déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n$.
2. On pose $f_1(x) = x - \sin x$, $f_2(x) = -1 + \frac{x^2}{2} + \cos x$, et $f_3(x) = -x + \frac{x^3}{6} + \sin x$.

   Montrer que ces trois fonctions sont positives ou nulle sur $[0; +\infty[$.

   Indication : étudier les variations de ces fonctions
3. Montrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 < n^4$ (**erreur d'énoncé : c'est** $\leqslant$ **et pas** $<$)
4. En déduire qu'on a, pour tout entier $n \geq 1$:

$$b_n - \frac{1}{6n^2} \leq a_n \leq b_n$$

5. Conclure.

Exercice 4

Pour tout entier naturel n non nul, on note h_n la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par :

$$\forall x > 0, \quad h_n(x) = x^n + 1 + \frac{1}{x^n}$$

1. Démontrer que pour tout entier naturel n non nul, la fonction h_n est strictement décroissante sur $]0, 1[$ et strictement croissante sur $[1, +\infty[$.
2. En déduire que pour tout entier naturel n non nul, l'équation :$h_n(x) = 4$ admet exactement deux solutions, notées u_n et v_n, et vérifiant : $0 < u_n < 1 < v_n$.
3. (a) Démontrer que :

$$\forall x > 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad h_{n+1}(x) - h_n(x) = \frac{(x-1)(x^{2n+1}-1)}{x^{n+1}}$$

   (b) En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $h_{n+1}(v_n) \geqslant 4$.

   (c) Montrer alors que la suite (v_n) est décroissante.
4. (a) Démontrer que la suite (v_n) converge vers un réel ℓ et montrer que $\ell \geqslant 1$.

   (b) En supposant que $\ell > 1$, démontrer que : $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n^n = +\infty$. En déduire une contradiction.

(c) Déterminer la limite de (v_n).

5. (a) Montrer que : $\forall n \geq 1,\ v_n \leqslant 3$.

   (b) Montrer que : $\forall n \geqslant 1,\ (v_n)^n = \dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$.

   (c) Retrouver ainsi le résultat de la question 4(c).

Exercice 5

Soit n un entier naturel non nul.

Dans une fête foraine, un stand propose le jeu suivant : le joueur lance n fois une pièce et compte le nombre de Pile obtenus. Si ce nombre est pair, le joueur est déclaré vainqueur, et s'il est impair, il est déclaré perdant.

Si le joueur est déclaré vainqueur, il gagne 10 euros pour chaque Pile obtenu, mais s'il a perdu, il doit payer 10 euros pour chaque Pile obtenu.

En particulier, s'il n'obtient aucun Pile, il est déclaré vainqueur mais ne remporte rien. La pièce est truquée, et à chaque lancer, la probabilité d'obtenir Pile est égale à p ($p \in]0,1[$), et celle d'obtenir Face est de $1-p$.

On notera X la variable aléatoire égale au nombre de Pile obtenus, et G la variable aléatoire égale au gain algébrique du joueur.

Enfin, on notera A l'événement : « le joueur est déclaré vainqueur » et on dira que le jeu est favorable au joueur si l'espérance mathématique de la variable aléatoire G est positive.

Partie 1

1. Reconnaître la loi de X.
2. Rappeler (sans démonstration) l'espérance et la variance de X en fonction de n et de p.
3. Exprimer, en fonction de n et de p, la probabilité de l'événement $[X=0]$ puis de l'événement $[X \geq 1]$.

Partie 2

Dans cette partie, on suppose que $n=3$ et que $p=\dfrac{2}{3}$.

4. Vérifier que : $\mathbb{P}(A) = \dfrac{13}{27}$.
5. Montrer que l'ensemble des valeurs prises par est : $G(\Omega) = \{-30, -10, 0, 20\}$, puis expliciter la loi de G sous forme d'un tableau.
6. Calculer l'espérance de la variable aléatoire G. Le jeu est-il favorable au joueur ?

Partie 3

Dans cette partie, on revient au cas général, où n est un entier naturel non nul et $p \in]0,1[$.

Celui qui tient le stand souhaite rendre le jeu plus attractif en affichant le slogan : « À ce jeu, il y a plus de gagnants que de perdants ! », et cherche donc les conditions nécessaires sur p et n pour que son affichage ne soit pas mensonger.

Soit Y la variable aléatoire définie par :

$$Y = (-1)^X$$

Autrement dit, Y prend la valeur 1 lorsque X prend un valeur paire, et Y prend la valeur -1 lorsque X prend une valeur impaire.

7. (a) On note $Z = \dfrac{Y+1}{2}$. Déterminer $Y(\Omega)$ l'ensemble des valeurs prises par Y, puis montrer que Z suit une loi de Bernoulli de paramètre $\mathbb{P}(A)$.

   (b) En déduire que $E(Y) = 2\mathbb{P}(A) - 1$.

8. On admet qu'on a également $E(Y) = (1-2p)^n$. Exprimer alors la valeur de $\mathbb{P}(A)$ en fonction de n et p.

9. Démontrer que :

$$\mathbb{P}(A) \geqslant \frac{1}{2} \Longleftrightarrow \left[p \leq \frac{1}{2} \quad \text{ou} \quad \text{« } n \text{ est pair »}\right]$$